Universidad Nacional de Ingeniería **23-12-2005**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2005-2**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE CALCULO NUMERICO (MB535)

SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO

Problema 1

a) Demuestre que toda matriz de la forma: $J_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, no es diagonalizable.

Solución
El polinomio característico será:

$$P(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\lambda \end{bmatrix} = (\alpha-\lambda)^4$$

Por lo tanto $\lambda = \alpha$ tiene multiplicidad algebraica 4.

Además $A - \alpha I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Que ya esta en la forma escalonada reducida, vemos que la multiplicidad geométrica de $\lambda = \alpha$ es 1. Por lo tanto no hay una base de vectores propios (se requiere 4 L.I., pero hay solo 1) para J_α y entonces la matriz no es diagonalizable.

b) En un sistema de punto flotante binario de 8 dígitos de mantisa, de los números $x_1 = 0.10110011x2^2$ y $x_2 = 0.10110010x2^2$. ¿Cual de los dos representa mejor al número $(2.8)_{10}$

Solución

$$x_1 = \left(2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8}\right)2^2 = 2.7969$$
$$x_2 = \left(2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-7}\right)2^2 = 2.7813$$

El más cercano a 2.8 es x_1

c) Dada la sucesión de término general u(n)=1+1/2^2+…+1/n^2, escribir una función en Matlab que determine R=u(n1)-u(n2), dados n1 y n2. El nombre de la función es *suc*.

Solución

```
function [R]=suc(n1,n2)
        un1=1:n1;
        un1=sum(1./un1.^2);
        un2=1:n2;
        un2=sum(1./un2.^2);
        R=un1-un2;
```

d) Escriba un código en Matlab para graficar la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x<0 \\ 3/2 & 0\le x<1 \\ 3-x & x\ge 1 \end{cases}$$

$$x\in[-1 \quad 2]$$

Solución

```
x=linspace(-1,2,30);
y=(x+2).*(x<0)+3/2.*((0<=x)&(x<1))+(3-x).*(1<=x);
plot(x,y)
```

e) La raíz de la ecuación $f(x)=0$ es encontrada usando el método de Newton Raphson. El valor estimado inicial de la raíz es $x_0=3$, $f(3)=5$. El ángulo de la tangente de la function f(x) en x = 3 es 57^0. el siguiente estimado más cercano a la raíz, x_1, es:

A) –3.2470 $\boxed{\text{B) -0.2470}}$ C) 3.2470 D) 6.2470

Problema 2

Considere la matriz A definida según:

$$a_{ij}=\frac{1}{i+j-1}$$

Considerar el sistema *A x = b* donde:

$$b=\{11/6 \quad 13/12 \quad 47/60\}^T$$

a. Resolver el sistema utilizando eliminación Gaussiana, operando con redondeo a 3 decimales.
b. Analizar el condicionamiento de la matriz.
c. Si $\bar{x}$ es el vector solución aproximado obtenido en a), calcule el residual *r* ($r=b-A\bar{x}$). Comente sus resultados teniendo en cuenta que el exacto es $(1\ 1\ 1)^T$.
d. ¿Es posible obtener la factorizacion de Cholessky?

Solución

a..

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.333 \\ 0.5 & 0.333 & 0.25 \\ 0.333 & 0.25 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 1.833 \\ 1.083 \\ 0.783 \end{pmatrix}$$

$$[A \quad b]\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.333 & 1.833 \\ 0 & 0.083 & 0.083 & 0.167 \\ 0 & 0 & 0.006 & 0.005 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.966 \\ 1.179 \\ 0.966 \end{pmatrix}$$

b. $k(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=1.833\times 408=747.864$

c. $r = \begin{pmatrix} 11/6 \\ 13/12 \\ 47/60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.333 \\ 0.5 & 0.333 & 0.25 \\ 0.333 & 0.25 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.966 \\ 1.179 \\ 0.966 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0442 \\ -0.0341 \\ -0.0266 \end{pmatrix}$

d. Es simétrica y definida positiva por lo tanto se puede obtener la factorización de Cholesky.

Problema 3

Sea: $A = \begin{bmatrix} -28 & 0 & 135 \\ 12 & 2 & -54 \\ -6 & 0 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.5 & 0 & 67.5 \\ 6 & 0.5 & -27 \\ -3 & 0 & 14 \end{bmatrix}^{-1}$

a) Determine los valores propios de A y sus multiplicidades algebraica y geométrica.
b) ¿Es A diagonalizable? En caso afirmativo muestre la matriz de transformación P (o Q) y la matriz diagonal D.
c) Realice 04 iteraciones del método de la potencia inversa a partir de $(1\ 0\ 0)^T$, para tener una aproximación del valor propio inferior y su vector propio correspondiente. Muestre el error del valor propio aproximado.

Solución

a) Polinomio característico

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} -28-\lambda & 0 & 135 \\ 12 & 2-\lambda & -54 \\ -6 & 0 & 29-\lambda \end{bmatrix} = -4 + 3\lambda^2 - \lambda^3 = -(\lambda+1)(-2+\lambda)^2$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad algebraica $ma_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con $ma_2 = 2$. La multiplicidad geométrica $mg_1 = n - rango(A+I) = 1$ y $mg_2 = n - rango(A-2I) = 2$.

b) $(A+I)X = 0 \quad \begin{bmatrix} -27 & 0 & 135 \\ 12 & 3 & -54 \\ -6 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X = t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A-2I)X = 0 \quad \begin{bmatrix} -30 & 0 & 135 \\ 12 & 0 & -54 \\ -6 & 0 & 27 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X = t \begin{pmatrix} 9/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 9/2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) Método de la potencia inversa

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -14.5 & 0 & 67.5 \\ 6 & 0.5 & -27 \\ -3 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = Bx_0 = \begin{pmatrix} -14.5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \mu_1 = -14.5 \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4138 \\ 0.2069 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} = -0.0690$$

$$y_2 = Bx_1 = \begin{pmatrix} -0.5345 \\ 0.2060 \\ -0.1034 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = -0.5345 \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.3871 \\ 0.1935 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \frac{1}{\mu_2} = -1.8710$$

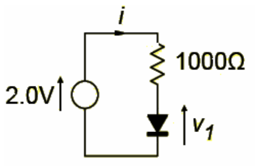
$$y_3 = Bx_2 = \begin{pmatrix} -1.4355 \\ 0.5800 \\ -0.2903 \end{pmatrix} \quad \mu_3 = -1.4355 \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4045 \\ 0.2022 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \frac{1}{\mu_3} = -0.6966$$

$$y_4 = Bx_3 = \begin{pmatrix} -0.8483 \\ 0.3371 \\ -0.1685 \end{pmatrix} \quad \mu_4 = -0.8483 \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.3974 \\ 0.1987 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \frac{1}{\mu_4} = -1.1788$$

$$error = \left| -1 - (-1.1788) \right| = 0.1788$$

Problema 4

Considere un circuito electrónico simple



Por ley de Ohm: $i = \dfrac{2 - V_1}{1000}$

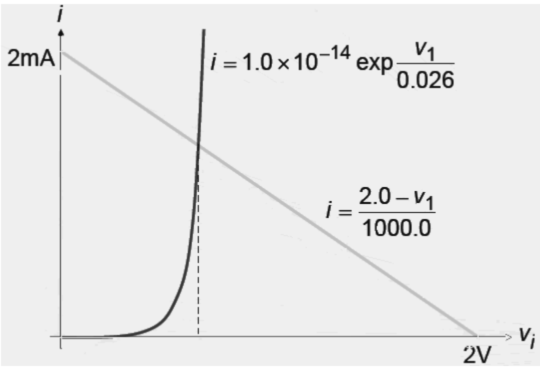
Por la ecuación de Shockley para el diodo: $i = 1.0x10^{-14} e^{\frac{V_1}{0.026}}$

Se desea calcular el voltaje V_1, para lo cual se pide:

a) Localice un dominio para el valor de V_1
b) Encuentre el algoritmo del punto fijo y demuestre que el punto fijo es único.
c) Realice 03 iteraciones usando el algoritmo encontrado en b).
d) Realice 02 iteraciones usando Newton Raphson, use como valor inicial la última aproximación encontrada en c).
e) Comente acerca de la convergencia entre estos dos métodos.

Solución

a) Localizar el dominio para el valor de V_1



b) Encuentre el algoritmo del punto fijo y demuestre que el punto fijo es único.

La ecuación puede ser transformada como:

$$\frac{2-v_1}{1.0x10^{-11}} = \exp\left(\frac{v_1}{0.026}\right) \quad \text{o} \quad \ln\left(\frac{2-v_1}{1.0x10^{-11}}\right) = \frac{v_1}{0.026}$$

Tal que:

$$v_1 = 0.026\ln\left(\frac{2-v_1}{1.0x10^{-11}}\right)$$

en la forma deseada para el método del punto fijo

$$g(x) = 0.026\ln\left(\frac{2-x}{1.0x10^{-11}}\right)$$

O bien

$$g(x) = 0.026\ln(2-x) - 0.026\ln\left(1.0x10^{-11}\right)$$

Prueba de la convergencia

$$g'(x) = -\frac{0.026}{2-x}\ \Big|_{x_o=1} = -0.026$$

k= $|g'(1)|$ =0.026<1

Unicidad del punto fijo

a=0, *b*=1.0

$g(a) \in [a \quad b]$ $\qquad$ $g(a)$= 0.6766

$g(b) \in [a \quad b]$ $\qquad$ $g(b)$= 0.6585

$\{x^k\} \in [a \quad b]$

$\therefore$ el punto fijo es único

c) Realizar 03 iteraciones usando el algoritmo encontrado en b).

A partir del punto inicial $x_0 = 1.0$

$$x_k = 0.026\ln\left(\frac{2-x_{k-1}}{1.0x10^{-11}}\right)$$

I	xi	g(xi)
1	0.658539	0.666177
2	0.666177	0.666029

d) Hacer dos iteraciones usando Newton Raphson, use como valor inicial la última aproximación encontrada en c).

*x*o= 0.66617

f(x) = 1.0e-14*exp(x/0.026)-(2-x)/1000

df(x) = 1.0e-14/0.026*exp(x/0.026)+1/1000

i	x	f	df	-f/df
0	0.66617	7.26582e-6	0.05258	-1.38184e-4
1	0.6660318	1.890740e-8	0.05231	- 3.614684e-7
2	0.6660314	1.289166e-13	0.05231	-2.46464e-12

Los Profesores